

NOTA 755 <sup>H</sup>

STARRINGGEBOUW

juli 1973

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding  
Wageningen

DE BEPALING VAN DE TRANSPORTTIJD  
VAN HET GRONDWATER BIJ STROMING  
IN DE VERZADIGDE ZONE

dr. L.F. Ernst

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties. Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten. Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking



3 MEI 1988

JSN 257122\*



## I N H O U D

	Blz.
1. INLEIDING	1
2. TRANSPORTDUUR VAN HET GRONDWATER IN DE VERZADIGDE ZONE AFGELEID UIT DE WET VAN DARCY	3
3. OPLOSSING MET BEHULP VAN COMPLEXE FUNCTIES	12
4. BEHANDELING VAN POTENTIAALFUNCTIES MET GESCHEIDEN VARIABELEN	22
5. OPPERVLAKTE METINGEN	27
6. SAMENVOEGING VAN UITKOMSTEN VERKREGEN IN DE HOOFDSTUKKEN 2, 3 EN 5	35
7. CONCLUSIES	37
LITERATUUR	42

De inhoud van deze nota komt in hoofdzaak overeen met een inleiding door de auteur gegeven voor het Instituut voor Bodemvruchtbaarheid te Haren (Groningen) op 21 december 1972.

De fig. 14, 17, 18, 19 en 20 zijn later toegevoegd.

## 1. INLEIDING

De stroming van het grondwater wordt zeer dikwijls gezien als een drainageprobleem, waarbij het van belang is iets te weten van de hoeveelheid water, die per tijdseenheid door het beschouwde gebied stroomt, van de bergingsveranderingen in dit gebied en van de corresponderende potentiaalverschillen.

Het kan ook van belang zijn iets te weten omtrent het transport van opgeloste stoffen en wel in het bijzonder in die gevallen dat de concentratie van de opgeloste stof niet constant is, maar afhangt van plaats en tijd. Als voorbeelden van dergelijke gevallen kunnen worden genoemd: zoute kwel in kustgebieden; infiltratie van water door middel van diepe putten of open leidingen met hoog peil, waarbij infiltratiewater en oorspronkelijk grondwater in het algemeen enig verschil in samenstelling hebben; uitspoeling van verzilte gronden door irrigatie met zout water, transport van meststoffen, insecticiden enz., die door het neerslagoverschot in de grondwaterstroom terecht komen.

Bij deze problemen wordt gevraagd naar de snelheid waarmee het grondwater zich beweegt en naar de tijd, die het grondwater nodig heeft om het beschouwde gebied geheel of gedeeltelijk te doorlopen. Bij dit transport ontstaat een geleidelijke vermindering van de concentratiegradiënten analoog aan wat er gebeurt bij de moleculaire diffusie in een niet bewegende vloeistof. Indien de beweging niet zeer langzaam is, is het effect duidelijk sterker, dan wat er volgens de theorie van de moleculaire diffusie zou mogen zijn. Om hiervoor een verklaring te vinden moet men behalve met de moleculaire diffusie ook rekening houden met de ingewikkelde beweging in het microscopische poriënstelsel, waar de wrijving langs de poriënwanden een neiging tot vergroting van de concentratiegradiënten geeft en in wijde poriën gemiddeld een snellere opschuiving plaats vindt dan in

nauwe poriën. Ook andere verschijnselen kunnen van belang zijn, zoals adsorptie en uitwisseling van ionen, precipitatie en oplossing (BEAR, 1972; KIRKHAM and POWERS, 1972).

Het concentratieverloop in de overgangszone tussen twee oorspronkelijk homogene vloeistofmassa's (de zogenaamde break through curve) kan zoals tevoren reeds werd opgemerkt in eerste benadering worden verklaard uit diffusie en convectie. Het verschijnsel in zijn geheel wordt aangeduid als dispersie.

Uit de experimenten blijkt dat een macroscopische beschrijving met formules van dezelfde soort als gebruikelijk bij de moleculaire diffusie in het algemeen bevredigend werkt. Bij deze experimenten heeft men zich vrijwel steeds beperkt tot de eenvoudigste stromings-toestand ( $v_x = \text{constant}$ ;  $v_y = v_z = 0$ ).

Bij de meeste grondwaterstromingen in de praktijk is het stromingsbeeld niet zo eenvoudig. Het is dan zo moeilijk met alle omstandigheden even nauwkeurig als in het eenvoudigste geval rekening te houden, dat men tot nu toe de daarvoor benodigde, zeer uitvoerige bewerking heeft achterwege gelaten. Men kan namelijk de moeilijkheden vrijwel geheel vermijden door een afzonderlijke behandeling toe te passen.

Men neemt aan dat er uitkomsten van voldoende nauwkeurigheid worden verkregen door het concentratieverloop langs een stroomlijn en loodrecht erop te bepalen, alsof er een bundel is van rechte evenwijdige stroomlijnen en de afgelegde weg en het bijbehorende tijdsinterval voor de werkelijke stroming en voor het vereenvoudigst geval (parallel-stroming in de x-richting) gelijk zijn.

De geleidelijke concentratieveranderingen kunnen worden afgeleid door een diffusievergelijking geldig te verklaren binnen een bewegend orthogonaal coördinaten-systeem, waarvan de oorsprong over een willekeurige stroomlijn loopt en de x-as steeds raaklijn aan de stroomlijn is. Een groot aantal publikaties is gewijd aan de behandeling van deze diffusievergelijking bij constante stroomsnelheid en een front loodrecht op de stromingsrichting. In vele gevallen is er echter een duidelijk verschil tussen de stromingsrichting en de normaal op het diffusie-front (voor een constante stromingsrichting en constante snelheid, naar willekeurige oriëntatie van het front, zie BEAR, 1972).

Op de theorie van deze diffusievergelijkingen zal hier niet nader worden ingegaan. In de volgende hoofdstukken is getracht een vrij volledige behandeling te geven van de gemiddelde beweging van de waterdeeltjes. De beweging van de oorsprong van het bewegende coördinatenstelsel is daaraan gelijk te stellen. Gemakshalve zal men deze oorsprong meestal laten samenvallen met het zwaartepunt van een hoeveelheid opgeloste stof door een kortdurende punt-injectie in de grond gebracht, ofwel de oorsprong leggen in het vlak dat een concentratie heeft gelijk aan het gemiddelde van twee oorspronkelijk vrij scherp gescheiden vloeistoffen. Laatstgenoemde overwegingen zijn op de verdere behandeling van geen invloed. Wel moet er op worden gewezen dat bij de volgende beschouwingen de mogelijke verschillen in dichtheid (soortelijk gewicht) en viscositeit worden verwaarloosd.

## 2. TRANSPORTDUUR VAN HET GRONDWATER IN DE VERZADIGDE ZONE AFGELEID UIT DE WET VAN DARCY

De fluxdichtheid, ook wel kortweg flux genoemd, kan volgens Darcy als volgt worden geschreven:

$$v_f = - k \text{ grad } h \quad (1)$$

$k$  = doorlatendheid van de grond in verzadigde toestand  
(cm/sec of m/dag)

$h$  = stijghoogte van het grondwater (potentiaal in cm of m)

De werkelijke gemiddelde snelheid van het grondwater is groter ( $v > v_f$ ), daar bij (1) nog niet wordt rekening gehouden met het feit dat de stroming niet in het gehele betrokken volume voorkomt, maar alleen in de poriën. Dit leidt tot:

$$v = - \frac{k}{\beta} \text{ grad } h \quad (2)$$

$\beta$  = poriëngehalte

Algemeen geldt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

of ook wel:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

Bij stationaire horizontale stromingen naar een lang recht kanaal of naar een diepe put komt men hiermee onmiddellijk tot de volgende uitdrukkingen voor de transportduur respectievelijk tussen  $x_1$  en  $x_2$  of tussen  $r_1$  en  $r_2$ :

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v_x} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta}{k} \frac{dx}{\frac{dh}{dx}} \quad (5)$$

ofwel

$$t_2 - t_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v_r} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\beta}{k} \frac{dr}{\frac{dh}{dr}} \quad (6)$$

Wordt aangenomen dat  $\beta$  en  $k$  constant zijn, dan kunnen deze grootheden voor het integraalteken worden geplaatst. Bij de radiale toestroming met constante stroomsterkte vanuit het oneindige naar een diepe put in een homogeen doorlatend pakket met vrijwel constante laagdikte  $D$  (fig. 1) levert de integratie geen moeilijkheden meer op. Voor de stijghoogte van het grondwater als functie van de afstand  $r$  tot de put geldt de formule van Thiem (fig. 2):

$$h_2 - h_1 = \frac{Q_o}{2\pi kD} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (7)$$

eventueel:

$$h(r) = \frac{Q_o}{2\pi kD} \ln \frac{r}{r_o} \quad (8)$$

$Q_o$  = opbrengst van de put (l/sec of  $m^3$ /dag)



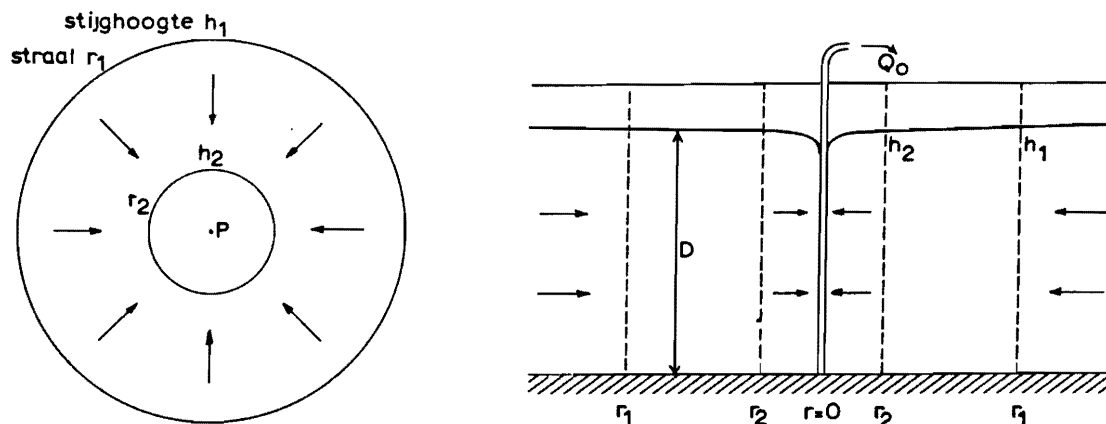


Fig. 1. De horizontale radiaal-symmetrische stroming naar een diepe put

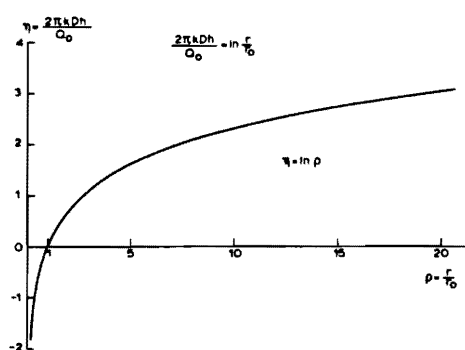


Fig. 2. Grafische voorstelling van de formule van Thiem

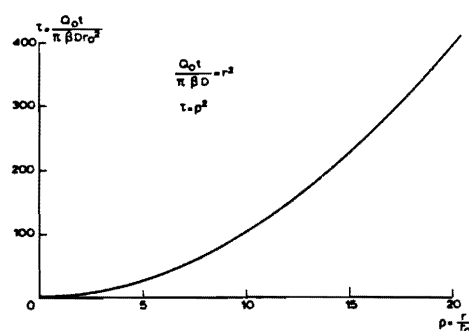


Fig. 3. Grafische voorstelling van de transporttijd naar een put met zeer kleine diameter volgens formule (9)

Door (8) naar  $r$  te differentiëren en vervolgens in (6) te substitueren verkrijgt men:

$$t_2 - t_1 = - \frac{2\pi\beta D}{Q_0} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\pi\beta D}{Q_0} (r_1^2 - r_2^2) \quad (9)$$

Formule (9) is voor  $r_2 \rightarrow 0$  grafisch voorgesteld in fig. 3.

Een andere eenvoudige oplossing vindt men bij de stationaire symmetrische drainage door evenwijdige sloten, indien ook voor dit geval mag worden aangenomen, dat de stroming vrijwel horizontaal is en voor  $\beta$  en  $kD$  constante waarden gelden onafhankelijk van de plaats (fig. 4). Hierbij wordt een parabolische grondwaterspiegel gevonden tot op korte afstand van de open leidingen, waar de radiale stromingscomponent tot gevolg heeft, dat de grondwaterspiegel van het parabolische verloop afwijkt. In het gebied met overwegend radiale stroming is de volgende behandeling niet geldig.

De parabolische grondwaterspiegel kan worden voorgesteld door:

$$h_m - h(x) = \frac{Nx^2}{2kD} \quad (10)$$

$N$  = constant neerslagoverschot (mm/dag of mm/jaar)

Indien  $N$  afhankelijk is van de tijd, mag men in formule (10) voor  $h_m$ ,  $h(x)$  en  $N$  de gemiddelden over de tijd substitueren.

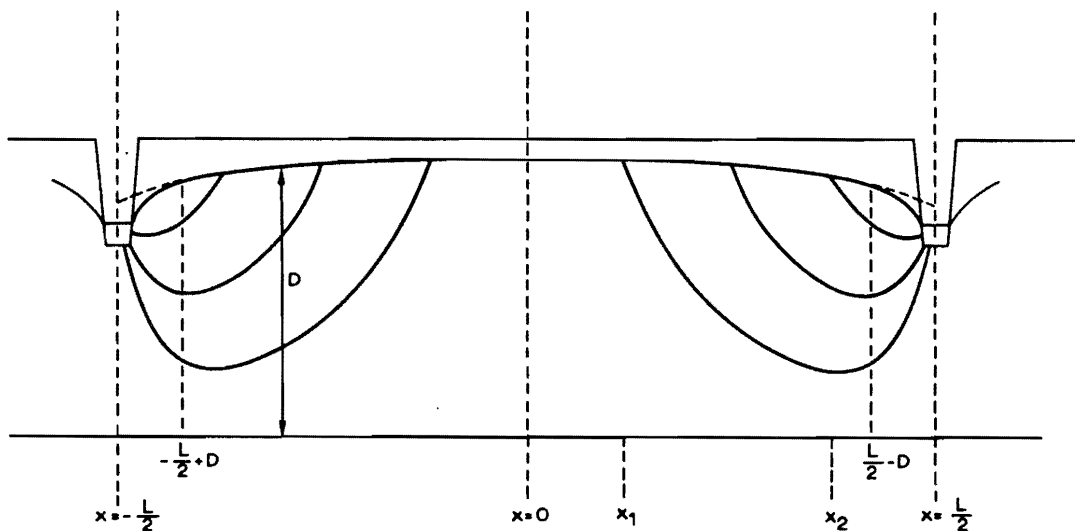


Fig. 4. Grondwaterstroming in een homogeen pakket bij symmetrische drainage door evenwijdige sloten. Voor het gebied  $-\frac{L}{2} + D < x < \frac{L}{2} - D$  kan de stroming als vrijwel horizontaal worden beschouwd

Uit (6) en (10) volgt:

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta D}{N} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \frac{\beta D}{N} \ln \frac{x_2}{x_1} \quad (11)$$

Formule (8) is grafisch afgebeeld in fig. 5. Hiermee is dus nog geen uitkomst verkregen voor de transporttijd, die de stroming gebruikt vanaf een willekeurig punt in het freatisch oppervlak tot aan de stroming in de dichtst bij gelegen sloot. Behalve voor stroomlijnen, die zeer dicht bij de ondoorlatende laag liggen, kan men een eerste benadering voor het gebied met radiale stroming geven met behulp van een variant op formule (9):

$$t(r_4) - t(r_3) = \frac{\pi \beta}{2NL} (r_3^2 - r_4^2) \quad (12)$$

Indien  $r_4 \ll r_3$ , kan de tweede term uit het rechterlid van formule (12) worden verwaarloosd. Door invoering van de transformatie  $r = \frac{1}{2} L - x$  kan (12) voor  $\frac{1}{2} L - D < x_3 < \frac{1}{2} L$  tenslotte worden vervangen door:

$$t\left(\frac{L}{2}\right) - t(x_3) = \frac{\pi \beta L}{8N} \left(1 - \frac{2x_3}{L}\right)^2 \quad (13)$$

Substitutie van  $x_2 = x_3 = \frac{L}{2} - D$  respectievelijk in de formules (11) en (13) en optelling van deze uitkomsten leidt tot:

$$t(x) = \frac{\beta D}{N} \left( \ln \frac{L - 2D}{2x} + \frac{\pi D}{2L} \right) \quad (14)$$

De uitkomsten van formule (14) geven slechts voor relatief grote waarden van  $D/L$  (namelijk  $D/L > 0,1$ ) een mogelijk belangrijke afwijking van wat uit formule (11) wordt gevonden. Een grafische voorstelling van formule (14) voor enkele in de praktijk veel voorkomende waarden van de parameters vindt men in fig. 6.

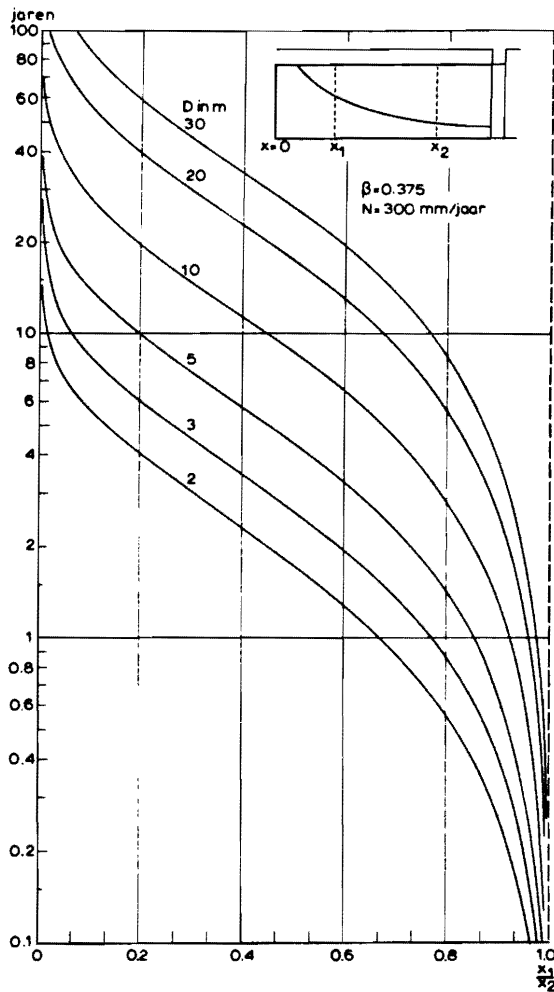


Fig. 5. Transporttijd volgens formule (11) voor een stroomlijn vanaf een punt met coördinaat  $x_1$  tot een punt met coördinaat  $x_2$ . Deze grafische voorstelling is ook geldig voor de stroming in fig. 4, mits  $\frac{L}{2} - x_2 > D$

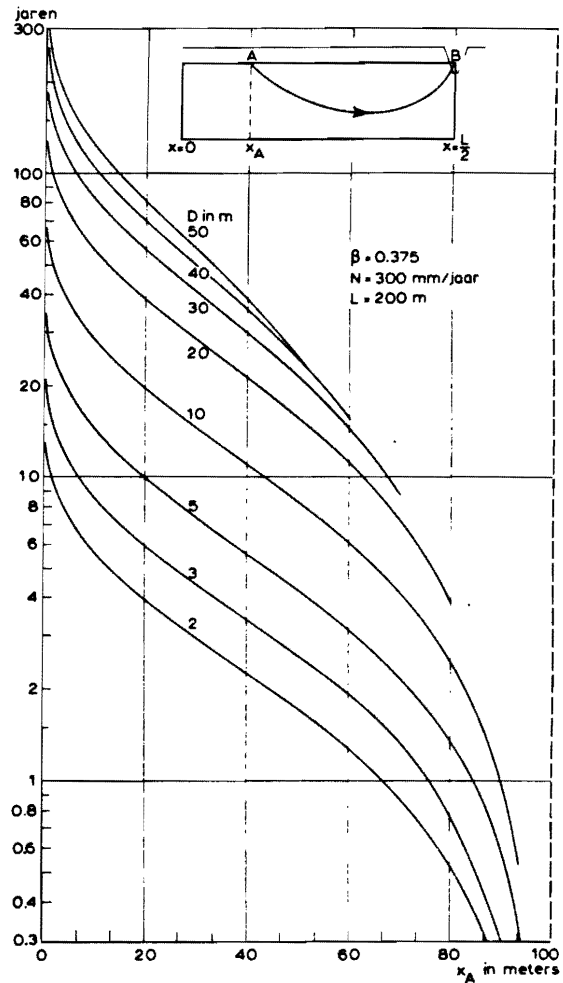


Fig. 6. Transporttijd volgens formule (14) bij de stationaire symmetrische drainage vanaf een willekeurig punt A van het freatisch oppervlak tot aan het uittreden in de open leiding bij B  
 $\left(\frac{D}{L} < \frac{1}{4} ; \frac{x}{L} < \frac{1}{2} - \frac{D}{L}\right)$

Ook bij heterogeen doorlatende gronden is een geval bekend waarbij de afleiding van de transporttijd weinig moeilijkheden geeft. Dit is namelijk het geval bij de kwelstroming van een hoge polder naar een lage polder, die door een lange rechte grens van elkaar zijn gescheiden en waarbij het geo-hydrologische pakket bestaat uit een homogene slecht doorlatende laag boven een homogene goed doorlatende laag.

De beide polders worden van een oneindig grote uitgestrektheid verondersteld en kunnen elk afzonderlijk worden behandeld. Daarom is in fig. 7 alleen de lage polder afgebeeld. Voor de potentiaal  $\phi$  van het diepe water geldt (HUISMAN, 1972, pag. 20-24):

$$\phi(x) - h_p = (\phi_d - h_p) e^{-\frac{x}{\sqrt{k_2 D_2 c_1}}} \quad (15)$$

$h_p$  = gemiddeld peil van open water en grondwaterspiegel in de polder

$\phi_d$  = stijghoogte van diep water onder de dijk

Formule (15) moet na differentiatie in de noemer van de integraal van (5) worden gesubstitueerd. Dit levert een uitkomst voor de transportduur over de horizontale stroming in de goed doorlatende laag:

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta_2 \sqrt{k_2 D_2 c_1}}{k_2 (\phi_d - h_p)} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x}{\sqrt{k_2 D_2 c_1}}} dx = \frac{\beta_2 D_2 c_1}{\phi_d - h_p} \left( e^{-\frac{x_2}{\sqrt{k_2 D_2 c_1}}} - e^{-\frac{x_1}{\sqrt{k_2 D_2 c_1}}} \right) \quad (16)$$

Indien  $x_1 = 0$ , gaat formule (16) over in:

$$t_{\text{hor}} = \frac{\beta_2 D_2 c_1}{\phi_d - h_p} \left( e^{-\frac{x}{\sqrt{k_2 D_2 c_1}}} - 1 \right) \quad (17)$$

Voor de verticale stroming kan men onmiddellijk afleiden:

$$t_{\text{vert}} = \frac{\beta_1 D_1 c_1}{\phi(x) - h_p} = \frac{\beta_1 D_1 c_1}{\phi_d - h_p} e^{\frac{x}{\sqrt{k_2 D_2 c_1}}} \quad (18)$$

Opstelling van (17) en (18) geeft de transporttijd over een stroomlijn vanaf een punt in het diepe pakket onder de dijk tot een punt in het freatisch oppervlak (zie bijv. BC in fig. 7 en 8) of een gelijksoortige weg in omgekeerde richting (zie bijv. AB in fig. 8):

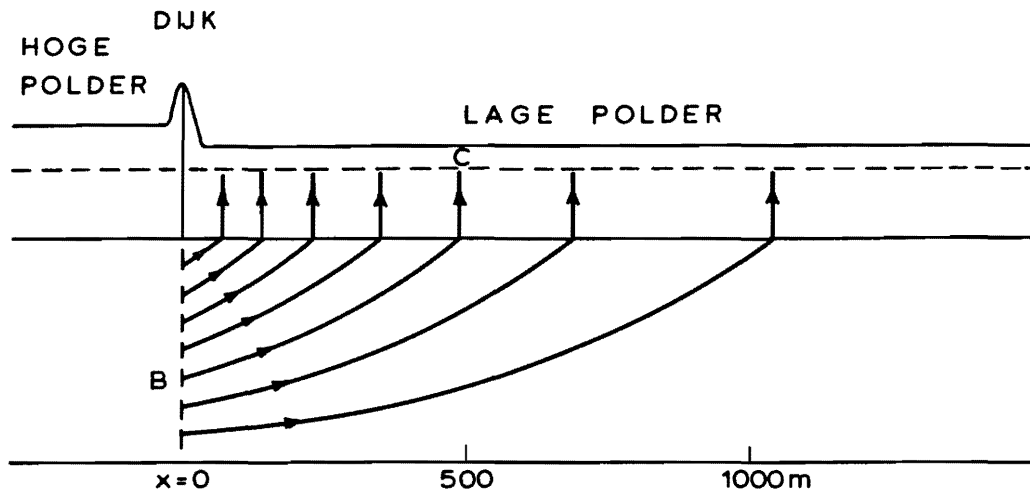


Fig. 7. Kwelstroming van hoge polder naar lage polder door een pakket bestaande uit 2 lagen:

$$c_1 = 500 \text{ dagen} \quad k_2 D_2 = 500 \text{ m}^2/\text{dagen}$$

Wegens de symmetrie is de linkerhelft van het gebied niet afgebeeld

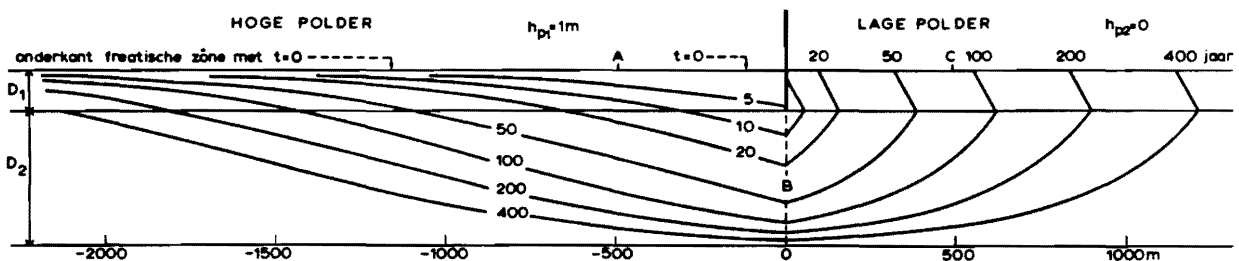


Fig. 8. Isochronen voor het transport van grondwater van een hoge polder naar een lage polder ( $k_2 D_2$  en  $c_1$  gelijk aan fig. 7)

$$\begin{aligned} D_1 &= 5 \text{ m} & k_1 &= 0,01 \text{ m/dag} & c_1 &= D_1/k_1 = 500 \text{ dagen} & \beta_1 &= 0,40 \\ 10 & & D_2 &= 16,6 \text{ m} & k_2 &= 30 \text{ m/dag} & k_2 D_2 &= 500 \text{ m}^2/\text{dag} & \beta_2 &= 0,35 \end{aligned}$$

$$\frac{t}{c_1} = \frac{\beta_1 D_1 + \beta_2 D_2}{\phi_d - h_p} e^{\frac{x}{\sqrt{k_2 D_2 c_1}}} - \frac{\beta_2 D_2}{\phi_d - h_p} \quad (19)$$

Van bovenstaande formules is met enige herleidingen gebruik gemaakt om fig. 8 samen te stellen.

Men kan zich tenslotte ook gevallen voorstellen waarin de integratie veel moeilijker is dan hier bij de formules (9), (11) en (16) het geval is geweest. Oorzaak hiervan kan bijv. zijn, dat  $\beta$  of  $k$  afhankelijk zijn van de plaats of dat  $h(x)$  eventueel  $h(r)$  door een vrij ingewikkelde functie moeten worden voorgesteld. Onder dergelijke omstandigheden is er een heel eenvoudige uitweg, mits  $h(x)$  of  $h(r)$  in een (niet te klein) aantal discrete punten bekend is. Men kan immers tussen twee opeenvolgende punten een lineair verloop van  $h$  veronderstellen:

$$\frac{h - h_i}{x - x_i} = a_i \quad (20)$$

Bij constante waarden van  $\beta$  en  $k$  volgt over het interval  $x_i$  tot  $x_{i+1}$ :

$$t_{i+1} - t_i = \frac{\beta_i}{k_i a_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \frac{\beta_i (x_{i+1} - x_i)}{k_i a_i} = \frac{\beta_i (x_{i+1} - x_i)^2}{k_i (h_{i+1} - h_i)} \quad (21)$$

Voor het gehele traject  $x_1$  tot  $x_n$  wordt tenslotte als uitkomst verkregen:

$$t_n - t_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i (x_{i+1} - x_i)^2}{k_i (h_{i+1} - h_i)} \quad (22)$$

### 3. OPLOSSING MET BEHULP VAN COMPLEXE FUNCTIES

Bij alle twee-dimensionale, stationaire grondwaterstromingen in homogeen doorlatende grond is de volgende oplossingsmethode gebaseerd op de algemene eigenschappen van complexe functies in principe toepasbaar (MUSKAT, 1937; BREITENÖDER, 1942; BEAR, 1972; KIRKHAM en POWERS, 1972). In plaats van de afleiding van een potentiaalfunctie  $h = f(x, y)$  wordt de afleiding van een complexe functie  $\omega = (\zeta)$  gevraagd. De complexe variabelen  $\omega$  en  $\zeta$  worden als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}\bar{\zeta} &= x + iy & \phi &= kh = \text{potentiaalfunctie} \\ \bar{\omega} &= \phi + i\psi & \psi &= \text{stroomfunctie}\end{aligned}$$

Men kan zich hierbij dus voorstellen dat door middel van de complexe functie  $\omega = g(\zeta)$  aan elk punt van het complexe  $\zeta$ -vlak een punt van het complexe  $\omega$ -vlak is toegevoegd. De snelheid in een willekeurig punt van het  $(x, y)$ -veld moet nu ook nog in complexe grootheden worden uitgedrukt. Daarvoor is het voldoende de differentieerbaarheid van  $\omega = g(\zeta)$  te beschouwen. Het differentiaalquotiënt  $d\omega/d\zeta$  moet eenzelfde waarde hebben, welke verplaatsing in het  $\zeta$ -vlak daarbij ook wordt genomen. Hieruit volgt:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (23)$$

$$\text{ofwel:} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (24)$$

Gelijkstelling van het reële en van het imaginaire deel van linker- en rechterlid van formule (24) leidt tot de bekende vergelijkingen van Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (25)$$

De complexe snelheid  $w = v_x - iv_y$  kan nu als volgt worden geschreven:

$$w = v_x - iv_y = k \left( \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{d\omega}{d\zeta} \quad (26)$$



Hiermee zijn voldoende gegevens verkregen om een uitdrukking te vinden voor de transporttijden bij de grondwaterstroming met gebruikmaking van verschillende complexe grootheden. Men kan de formules (5) en (6) in een iets andere vorm schrijven, nu voor een kromlijnige baan  $S$  met coördinaat  $s$ :

$$t = \int_S \frac{ds}{v(s)} \quad (27)$$

In deze uitdrukking dienen de volgende substituties plaats te vinden, waarbij van de absolute waarden van enkele complexe grootheden zal worden gebruik gemaakt:

$$v(s) = \beta |\omega| = \beta \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right| \quad (28)$$

$$ds = |d\zeta| = \left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right| |d\omega| = - \left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right| d\zeta \quad (29)$$

Substitutie van (28) en (29) in (27) levert voor de transporttijd bij een grondwaterstroming lopende van  $\phi_1$  naar  $\phi_2$  (dit houdt dus in  $\phi_1 > \phi_2$ ) de volgende uitkomst:

$$t = - \beta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right|^2 d\phi = \beta \int_{\phi_2}^{\phi_1} \left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right|^2 d\phi \quad (30)$$

Hoewel  $d\zeta/d\omega$  een complexe grootheid is, is het onmiddellijk aan de absoluutstrepen te zien, dat achter het integraalteken in formule (30) een reële grootheid staat. Om een zo groot mogelijke vereenvoudiging te verkrijgen kan men dit nog op de volgende manier schrijven:

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = F(\omega) = F_1(\phi, \psi) + iF_2(\phi, \psi) \quad (31)$$

$F_1$  en  $F_2$  zijn gewone reële functies van  $\phi$  en  $\psi$ .

$$\left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (32)$$

Door substitutie van (32) in (30) verkrijgt men een integraal waarin uitsluitend reële grootheden voorkomen

$$t(\Psi, \phi_1, \phi_2) = \beta \int_{\phi_2}^{\phi_1} \{F_1^2(\phi, \Psi) + F_2^2(\phi, \Psi)\} d\phi \quad (33)$$

Deze integraal zal in sommige gevallen met elementaire middelen kunnen worden opgelost. Zou dit echter teveel moeilijkheden geven, dan kan altijd een uitweg worden gevonden door grafische integratie. Eventuele moeilijkheden bij de eerste stap - namelijk de afleiding van de functie  $\omega(\zeta)$  - kunnen niet worden ontweken. Afhankelijk van de omstandigheden (randvoorwaarden) zal de afleiding van  $\omega(\zeta)$  en de omvang van het uitgeschreven differentiaalquotiënt meer of minder grote moeilijkheden opleveren.

Voor de volgende drie relatief eenvoudige gevallen worden alleen de belangrijkste formules opgegeven. Voor een volledige afleiding kan worden verwezen naar welbekende handboeken over de functietheorie, naar bovengenoemde handboeken over grondwaterstromingstheorie of naar meer speciale publikaties (ERNST, 1962).

#### Geval 1

Het patroon van stroomlijnen ( $\Psi = \text{constant}$ ) en equipotentiaallijnen ( $\phi = \text{constant}$ ), dat is afgebeeld in fig. 9b, correspondeert met de volgende uitdrukking:

$$\omega = a \zeta^2 \quad (34)$$

Hieruit is onmiddellijk te zien dat een deel van deze figuur een oplossing geeft van een deel van het drainageprobleem bij een homogeen pakket van constante dikte (fig. 9c). Dat deel van het gebied, waar de stroming overwegend radiaal is gericht (omgeving van de drains), moet worden uitgezonderd. De coëfficiënt  $a$  in formule (34) moet nog worden vervangen door  $-N/2D$ , zodat formule (34) overgaat in:

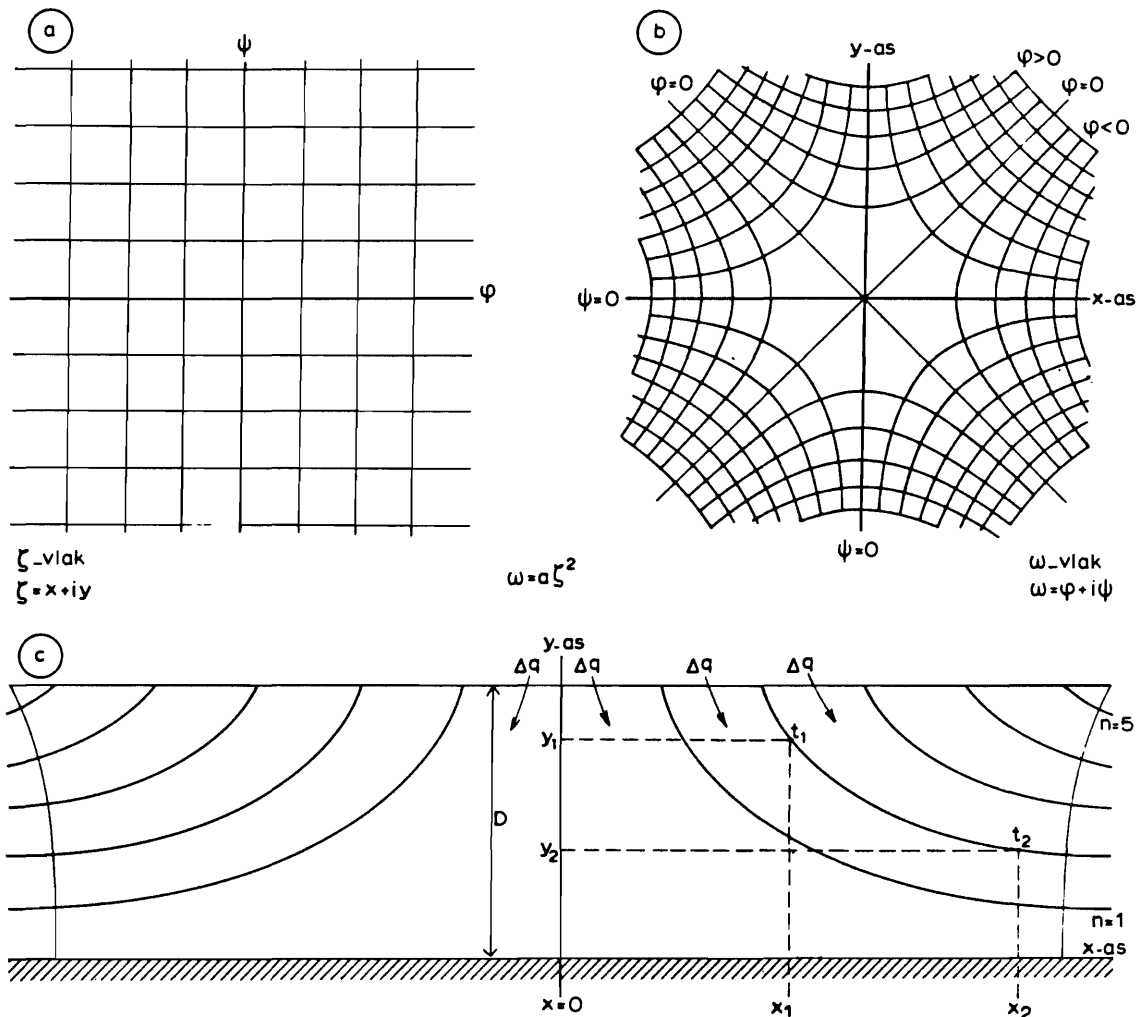


Fig. 9. Behandeling van de grondwaterstroming in het middengedeelte van fig. 4 met behulp van complexe functies

$$\omega = -\frac{N}{2D} \zeta^2 \quad (35)$$

Uit (35) volgt onmiddellijk:

$$\left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right|^2 = \left| \sqrt{-\frac{D}{2N\omega}} \right|^2 = \frac{D}{2N|\omega|} = \frac{D}{2N\sqrt{\phi^2 + \psi^2}} \quad (36)$$

Vervolgens kan (36) in (30) worden gesubstitueerd:

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta D}{2N} \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\phi^2 + \psi^2}} = \frac{\beta D}{2N} \ln \left[ \phi + \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \right] \Big|_{\phi_2}^{\phi_1} \quad (37)$$

Uit (35) volgt echter ook:

$$\phi = -\frac{N}{2D}(x^2 - y^2) \quad (38)$$

$$\psi = -\frac{N}{D}xy \quad (39)$$

Substitutie van (38) en (39) in (37) geeft:

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta D}{2N} \ln \frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{\beta D}{N} \ln \frac{x_2}{x_1} \quad (40)$$

Voor het transport op de  $n^e$  stroomlijn (zie fig. 9c) kan formule (40) eventueel nog in een iets andere vorm worden geschreven:

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta x_1 y_1}{n \Delta \psi} \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{\beta x_1 y_1}{\psi_n} \ln \frac{x_2}{x_1} \quad (41)$$

## Geval 2

Fig. 10 toont de symmetrische toestroming door een homogeen pakket van constante dikte naar een oneindig lange rechte drain. De volgende formule geeft een oplossing waarmee zelfs tot op oneindig grote afstand nog uitkomsten worden verkregen (ERNST, 1962; pag. 12):

$$\omega = \frac{q_0}{\pi} \ln \frac{e^{-\frac{\pi \zeta}{2D}} - e^{\frac{\pi \zeta}{2D}}}{2} = \frac{q_0}{\pi} \ln(-\sinh \frac{\pi \zeta}{2D}) \quad (42)$$

Om hieraan geen oneindig grote potentiaalverschillen te verbinden, moet men veronderstellen, dat ofwel de stroomsterkte  $q_0$  zeer klein, ofwel de doorlatendheid zeer groot is, ofwel dat de afmetingen in de x-richting binnen zekere grenzen blijven en wel zodanig, dat aan de volgende uitdrukking wordt voldaan:

$$\frac{x}{D} << \frac{4kD}{q_0} \quad (43)$$

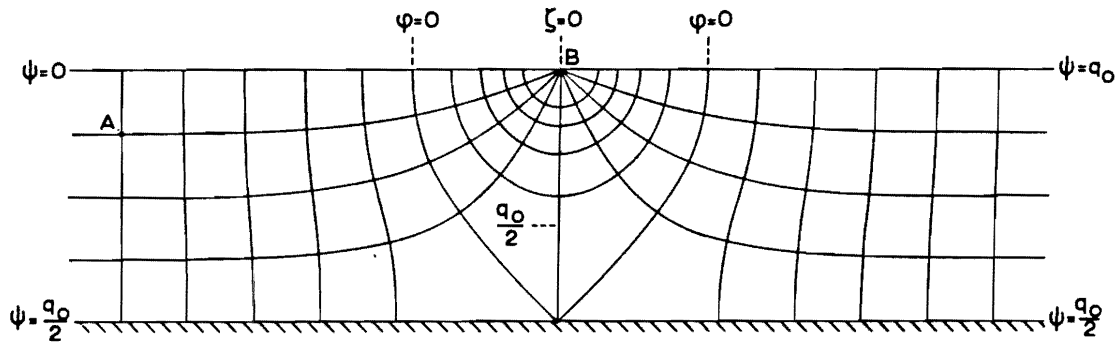


Fig. 10. De symmetrische toestroming van grondwater naar een lange, rechte, ondiepe drain door een homogeen pakket van constante dikte. Van links komt een stroomsterkte  $q_0/2$ , van rechts komt een stroomsterkte  $q_0/2$ , via de drain bij B is er een uitstroming  $q_0$

Door gebruik te maken van (30) kan tenslotte worden gevonden:

$$\frac{\pi q_0 (t_2 - t_1)}{4\beta D^2} = \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{e^{\frac{\pi\phi}{q_0}}}{\sqrt{e^{\frac{2\pi\phi}{q_0}} + e^{-\frac{2\pi\phi}{q_0}} + 2 \cos \frac{2\pi\psi}{q_0}}} d\left(\frac{\pi\phi}{q_0}\right) \quad (44)$$

Voor  $0 < \psi < \frac{q_0}{2}$  volgt hieruit

$$\frac{\pi q_0 (t_2 - t_1)}{2\beta D^2} = \operatorname{arcsinh} \left. \frac{e^{\frac{2\pi\phi}{q_0}} + \cos \frac{2\pi\psi}{q_0}}{\sin \frac{2\pi\psi}{q_0}} \right|_{\phi_2}^{\phi_1} \quad (45)$$

Voor  $\phi_2 \rightarrow -\infty$ , dus bijvoorbeeld van A naar B:

$$\frac{\pi q_0 t}{2\beta D^2} = \operatorname{arcsinh} \frac{e^{\frac{2\pi\phi}{q_0}} + \cos \frac{2\pi\psi}{q_0}}{\sin \frac{2\pi\psi}{q_0}} - \operatorname{arcsinh} \left( \cot \frac{2\pi\psi}{q_0} \right) \quad (46)$$

In vele praktijkgevallen kan het van belang zijn het verschil in transporttijd te bepalen in vergelijking met een zuiver horizontale stroming (zie fig. 11).

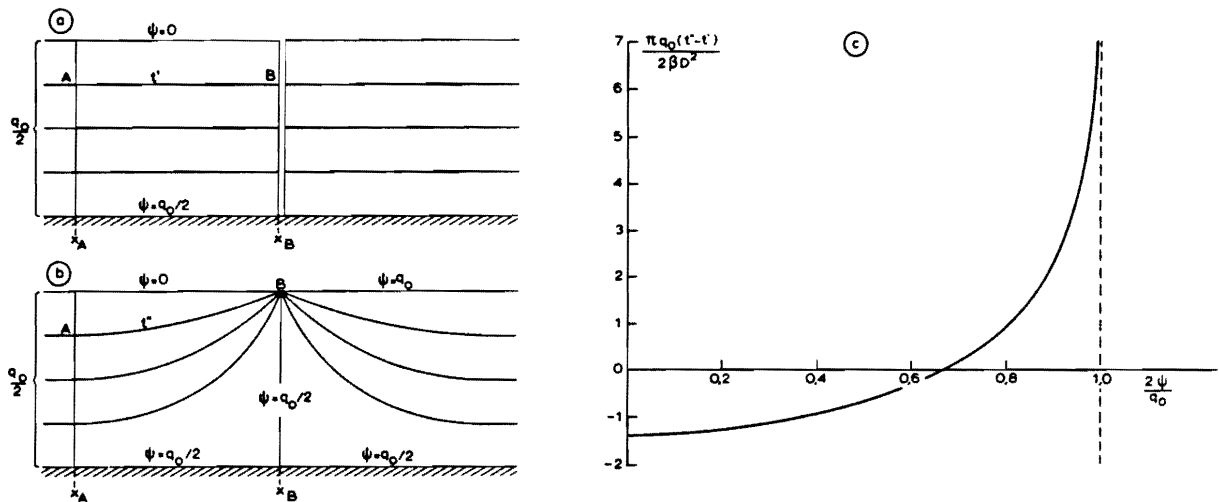


Fig. 11. (a) Symmetrische grondwaterstroming naar een diepe drain met verticale taluds tot aan de ondoorlatende laag, waardoor de stroming zuiver horizontaal blijft.

(b) Symmetrische grondwaterstroming naar een ondiepe drain, waarbij de radiale component van de stroming een duidelijke invloed heeft.

(c) Het verschil in transporttijd tussen twee gelijkwaardige gevallen van symmetrische uitstroming (fig. 11a en 11b) volgens formule (50). Onder gelijkwaardig dient te worden verstaan: gelijke waarden voor laagdikte  $D$ , poriëngehalte  $\beta$  en stroomsterkte  $q_0$ . Het verschil  $t'' - t'$  is berekend voor gelijke afstanden  $x_A$  tot  $x_B$ .

Voor elke afstand  $x_A x_B$  geldt bij de zuiver horizontale stroming naar een diepe drain (zie fig. 11b met  $x_B = 0$ ):

$$\frac{q_0 t'}{2\beta D^2} = \frac{x_B - x_A}{D} = -\frac{x_A}{D} \quad (47)$$

Uit formule (42) voor de toestroming naar een diepe drain kan worden afgeleid, mits het punt A voldoende ver van de drains verwijderd is, dat de potentiaal in het punt A kan worden voorgesteld door:

$$\phi_A = \left( \frac{x_B - x_A}{2D} - \frac{1}{\pi} \ln 2 \right) q_0 \quad (48)$$

Uit (45) en (48) volgt tenslotte:

$$\frac{\pi q_0 t''}{2\beta D^2} = 2\pi \left( \frac{x_B - x_A}{2D} - \frac{1}{\pi} \ln 2 \right) + \ln \frac{2}{\sin \frac{2\pi\psi}{q_0}} - \operatorname{arcsinh} \left( \cot \frac{2\pi\psi}{q_0} \right) \quad (49)$$

Aftrekken van (47) en (49) geeft:

$$\frac{\pi q_0 (t'' - t')}{2\beta D^2} = -\ln 2 - \ln \left( \sin \frac{2\pi\psi}{q_0} \right) - \operatorname{arcsinh} \left( \cot \frac{2\pi\psi}{q_0} \right) \quad (50)$$

Een grafische voorstelling van formule (50) wordt gegeven in fig. 11c.

### Geval 3

Wordt aan de symmetrische grondwaterstroming met uitstroming  $q_0$  een doorgaande horizontale stroming met intensiteit  $\frac{1}{2} q_0$  toegevoegd (ERNST, 1962; pag. 12), dan ontstaat een eenzijdige toestroming (fig. 12) met even sterke uitstroming als in het vorige geval. De bijbehorende complexe functie is onmiddellijk uit (42) af te leiden:

$$\omega = \frac{q_0}{\pi} \left\{ \ln \left( -\sinh \frac{\pi\zeta}{2D} \right) - \frac{\pi\zeta}{2D} \right\} = \frac{q_0}{\pi} \ln \frac{e^{-\frac{\pi\zeta}{D}} - 1}{2} \quad (51)$$

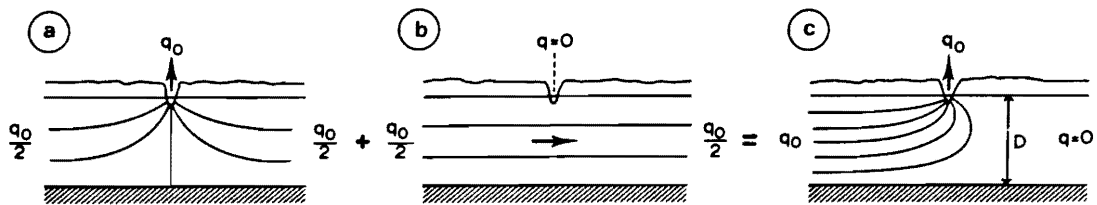


Fig. 12. Samenvoeging van de symmetrische grondwaterstroming (a) en de doorgaande grondwaterstroming (b) geeft een eenzijdige toestroming (c).

Fig. 12b kan worden voorgesteld door de complexe functie:

$$\omega = -q_0 \zeta / 2D$$

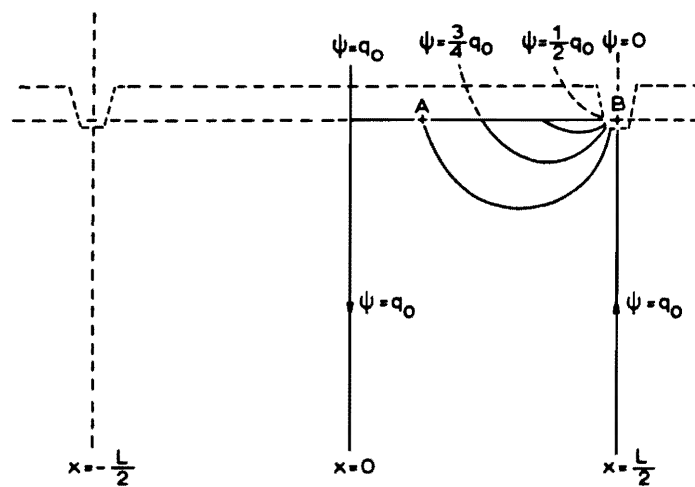


Fig. 13. De stationaire symmetrische drainage-toestand bij een homogeen doorlatend pakket met ondoorlatende basis op oneindig grote diepte ( $D = \infty$ ) kan worden afgeleid uit fig. 12c door de rechterhelft van deze figuur te draaien over  $3\pi/2$  en de laagdikte in fig. 12c gelijk te stellen aan de halve drainafstand in fig. 13



Draaiing over  $3\pi/2$  doet de rechterhelft van fig. 12c overgaan in de rechterhelft van fig. 13. Formule (51) gaat over in:

$$\omega = \frac{q_0}{\pi} \ln \frac{e^{i \frac{2\pi\zeta}{L}} - 1}{2} \quad (52)$$

Differentiëren van (52) en substitueren in (30) levert op:

$$\begin{aligned} \frac{\pi q_0 (t_2 - t_1)}{\beta L^2} &= \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{e^{\frac{2\pi\phi}{q_0}}}{4 e^{\frac{2\pi\phi}{q_0}} + 4 \cos \frac{\pi\Psi}{q_0} e^{\frac{\pi\phi}{q_0}} + 1} d\left(\frac{\pi\phi}{q_0}\right) \\ &= \frac{1}{8} \ln(4 e^{\frac{2\pi\phi}{q_0}} + 4 \cos \frac{\pi\Psi}{q_0} e^{\frac{\pi\phi}{q_0}} + 1) - \frac{1}{4} \cot \frac{\pi\Psi}{q_0} \arctan \frac{2 e^{\frac{\pi\phi}{q_0}} + \cos \frac{\pi\Psi}{q_0}}{\sin \frac{\pi\Psi}{q_0}} \Big|_{\phi_1}^{\phi_2} \end{aligned} \quad (53)$$

Wordt gezocht naar de transporttijd vanaf een punt van het frea-tisch oppervlak (zie punt A in fig. 13) tot aan de uitstroming in een open leiding van kleine afmetingen (zie punt B in fig. 13), dan kan formule (53) nog belangrijk worden vereenvoudigd door gebruik te maken van de volgende betrekking tussen  $\phi$  en  $\Psi$  geldig voor alle punten van de grondwaterspiegel ( $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ ):

$$\phi = \frac{q_0}{\pi} \ln(\cos \frac{\pi x}{L}) = \frac{q_0}{\pi} \ln(-\cos \frac{\pi\Psi}{q_0}) \quad (54)$$

Hieruit volgt voor de transporttijd van A naar B, respectievelijk met  $\phi_A$  volgens (54) en  $\phi_B = -\infty$ :

$$\frac{\pi q_0 t}{\beta L^2} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi\Psi}{q_0} \arctan (\cot \frac{\pi\Psi}{q_0}) \quad (55)$$

Dit is nog te vereenvoudigen tot:

$$\begin{aligned}\frac{q_o t}{\beta L^2} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2\Psi}{q_o}\right) \cot \frac{\pi\Psi}{q_o} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \cot \pi \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \cot \frac{\pi x}{L}\end{aligned}\quad (56)$$

Een grafische weergave van formule (56) is te vinden in fig. 20, bovenste kromme.

#### 4. BEHANDELING VAN POTENTIAALFUNCTIES MET GESCHEIDEN VARIABELEN

Er zijn slecht twee gevallen, dat de oplossingsmethode gegeven in hoofdstuk 2, waarbij slechts met 1 ruimte-coördinaat (x of r) wordt rekening gehouden, eenzelfde graad van exactheid geeft als de oplossingsmethode uit hoofdstuk 3, waarbij van complexe functies wordt gebruik gemaakt, en met 2 ruimte-coördinaten (x en y) kan worden rekening gehouden.

De formules (5) en (6) geven in principe altijd een exacte oplossing, maar dan moet daarbij het juiste verband tussen x en y of tussen r en z langs een stroomlijn bekend zijn. Met behulp van een dergelijke betrekking moet na differentiatie een variabele y of z uit de noemer worden geëlimineerd en kan de integratie worden uitgevoerd. Genoemde eliminatie is echter overbodig als de oplossing  $h(x, y)$  of  $h(r, z)$  met gescheiden variabelen kan worden geschreven en wel respectievelijk:

$$h(x, y) = h_1(x) + h_2(y) \quad (57)$$

$$h(r, z) = h_1(r) + h_2(z) \quad (58)$$

Zoals bekend moeten de potentiaalfuncties als oplossing voldoen aan de differentiaalvergelijking van Laplace. Voor de twee genoemde gevallen kan hiervoor respectievelijk worden geschreven in rechthoekige en in cylinder-coördinaten:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (60)$$

Bij axiale symmetrie vervalt een van de termen van (60):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (61)$$

Uit (57) en (59) volgt formule (62) als oplossing, waarbij  $a$ ,  $b_i$  en  $c_i$  constanten zijn, die uit de randvoorwaarden moeten worden bepaald:

$$h = a(x + \frac{b_1}{2a})^2 - a(x + \frac{b_2}{2a})^2 + c_2 = a(x'^2 - y'^2 + c_4) \quad (62)$$

Uit (58) en (61) volgt:

$$h = a(z^2 - \frac{1}{4} r^2) + b_3 \ln r + c_5 \quad (63)$$

Oplossing (62) is gelijkwaardig aan (35), daar deze uitdrukking immers kan worden vervangen door (38) en (39) en in (38) het gescheiden zijn van de variabelen inderdaad op overeenkomstige manier aanwezig is. Bij differentiatie van (62) mag de term met  $y'^2$  worden verwaarloosd. Dit houdt in dat bij de bepaling van de transporttijd (62) mag worden vervangen door (10). De gelijkheid van de oplossingen (11) en (40) wees hier ook al op.

Voor die gevallen, dat men de nauwkeurigheid bij het gebruik van slechts 1 ruimte-coördinaat als voldoende beschouwt, zou men zich kunnen afvragen, in hoeverre daardoor een behandeling van niet-stationaire toestanden mogelijk wordt.

Oplossingen van de volgende soort zijn reeds zeer lang in gebruik. Alleen in de laatste term van deze formule komt de variabele  $t$  en de bergingscoëfficiënt  $\mu$  voor (ERNST, 1962, pag. 90-93):

$$h(x, t) = A_0 - A_1 \left(\frac{x}{2L}\right)^2 + \sum B_n \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} e^{-\frac{4\pi^2 k D t}{\mu \lambda_n^2}} \quad (64)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -\frac{k}{\beta} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{k}{\beta} \left\{ \frac{A_1 x}{2L^2} - \sum B_n \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n} e^{-\frac{4\pi^2 k D t}{\mu \lambda_n^2}} \right\} \quad (65)$$

Hiermee is een differentiaalvergelijking verkregen, die weinig moeilijkheden geeft, wanneer slechts naar numerieke oplossingen voor een of meer bijzondere gevallen wordt gezocht.

Om een expliciete oplossing te vinden, die eenvoudig is en toch vrij algemeen geldig, moet men zijn toevlucht nemen tot gebruik van zogenaamde quasi-stationaire toestanden (ERNST, 1962, pag. 139 e.v.). Men kan daarmee tot een gelijksoortige oplossing komen, die wat gemakkelijker bij praktische problemen aansluit.

Een randvoorwaarde, die bij het onderhavige probleem vrij belangrijk kan zijn, is de enkelvoudig sinusvormige fluctuatie van het neerslagoverschot met een periode  $T = 1$  jaar:

$$N(t) = \bar{N} + N_a \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (66)$$

Wordt de bijbehorende periodieke oplossing gezocht dan kan met elementaire middelen de volgende formule voor de extreme waarde van het hoogteverschil in de symmetrische grondwaterspiegel worden afgeleid (ERNST, 1962, pag. 143):

$$h_m - h_o = \bar{N}T + \frac{N_a T}{\sqrt{\left(\frac{T}{T}\right)^2 + (2\pi\alpha\mu)^2}} \sin \frac{2\pi(t - \xi)}{T} \quad (67)$$

$h_m$  = hoogte van het freatisch oppervlak midden tussen de open leidingen

$h_o$  = peil van het open water (eventueel minimum peil bij afvoer nul)

$T$  = drainage-weerstand - zie formule (68)

$\alpha$  = verhouding van de gemiddelde hoogte van de grondwaterspiegel tot de maximale hoogte uitgemeten ten opzichte van het constante peil van het open water (eventueel het minimale peil bij afvoer nul). De waarde van  $\alpha$  varieert van 2/3 bij een parabolische vorm tot 1 bij een rechthoekige vorm

$\mu$  = bergingscoëfficiënt

$\xi$  = naijling van  $h$  ten opzichte van  $N$

De drainage-weerstand  $T$  wordt hier gedefinieerd door middel van de volgende formule voor de afvoer  $U$ :

$$U = \frac{h(o, t) - h_o}{T} \quad (68)$$

De grootte van de naijling  $\xi$ , die hier verder van weinig belang is, kan worden afgeleid uit:

$$\frac{2\pi\xi}{T} = \arctan \frac{2\pi\alpha\mu T}{T} \quad (69)$$

Voor zover in het middengedeelte van een strook begrensd door twee open leidingen de vorm van de grondwaterspiegel bij benadering parabolisch is, kan formule (67) worden uitgebreid tot:

$$h(x, t) - h_o = \left\{ 1 - \frac{x^2}{2kDT} \right\} \left\{ \bar{N}T + \frac{N_a T}{\sqrt{\left(\frac{T}{T}\right)^2 + (2\pi\alpha\mu)^2}} \sin \frac{2\pi(t - \xi)}{T} \right\} \quad (70)$$

Door (70) in (2) te substitueren en dit resultaat vervolgens in (3) te substitueren wordt de volgende differentiaalvergelijking met gescheiden variabelen verkregen:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\beta D} \left\{ \bar{N} + \frac{N_a}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi\alpha\mu T}{T}\right)^2}} \sin \frac{2\pi(t - \xi)}{T} \right\} dt \quad (71)$$

De oplossing van (71) kan onmiddellijk worden gegeven:

$$\ln x = \frac{1}{\beta D} \left\{ \bar{N}t - \frac{N_a T}{2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi\alpha\mu T}{T}\right)^2}} \cos \frac{2\pi(t - \xi)}{T} \right\} + \text{constante} \quad (72)$$

Substitueert men: 
$$\frac{2\pi(t - \xi)}{T} = \tau \quad (73)$$

en: 
$$\text{constante} = -\frac{\bar{N}\xi}{\beta D} + \ln C \quad (74)$$

dan kan (72) door een iets kortere uitdrukking worden vervangen

$$\ln \frac{x}{C} = \frac{\bar{N}T}{2\pi\beta D} \left\{ \tau - \frac{N_a}{\bar{N} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi\alpha\mu T}{T}\right)^2}} \cos \tau \right\} \quad (75)$$

In fig. 14 is een grafische afbeelding gegeven van formule (75) bij een gegeven stel waarden van de parameters. Substitutie van deze waarden in (67) of (70) geeft ook negatieve uitkomsten, hetgeen inhoudt dat het water in de sloot bij de laagste grondwaterstanden door invoer van water van buiten het gebied kunstmatig op peil wordt gehouden, wat infiltratie (omkering van de stromingsrichting) tot gevolg heeft.

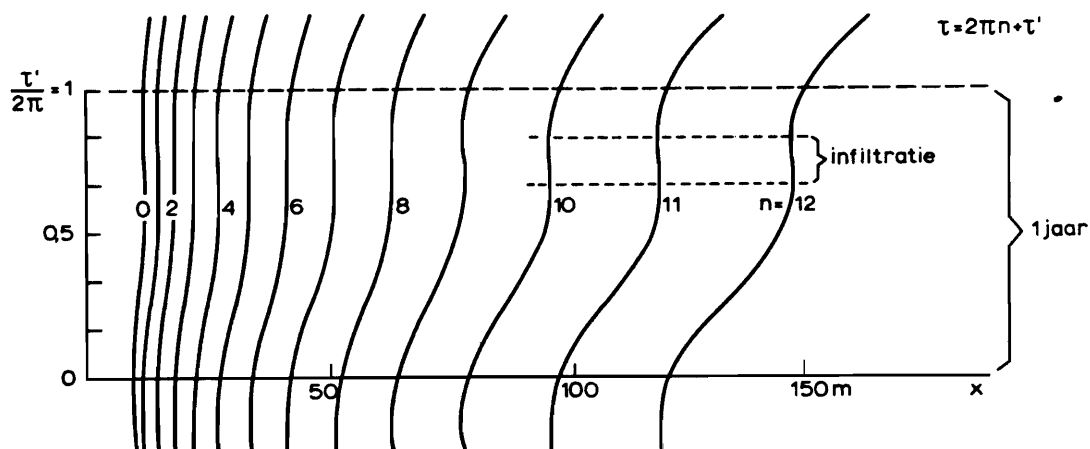


Fig. 14. Grafische voorstelling van het verband tussen  $x$  en  $\tau$  volgens formule (75), indien de parameters de volgende waarden hebben:  $\bar{N} = 300$  mm/jaar;  $N_a = 400$  mm/jaar;  $T = 300$  dagen;  $D = 4$  m;  $\beta = 0,36$ ;  $\alpha = 0,8$ ;  $\mu = 0,15$ ;  $C = 10$  m. Uit formule (69) volgt de naijling  $\xi = 32$  dagen

Het veel voorkomende en wat moeilijker te behandelen geval, dat het slootpeil gedurende het droogste deel van de zomer steeds verder daalt, de sloten droog komen te staan en een vrijwel horizontale grondwaterspiegel onder de slootbodem wordt gevonden, zal hier buiten beschouwing blijven.

Een ander niet-stationair geval, dat in het algemeen wel enige moeilijkheden kan geven, ontstaat uit de plotselinge peilverandering van het open water. Wordt daarbij de radiale stroming bij de open leidingen verwaarloosd en gebruik gemaakt van dezelfde methode als waarmee formule (67) e.v. is verkregen (ERNST, 1962, pag. 153), dan geeft ook in dat geval de afleiding van een expliciete formule verder geen noemenswaardige moeilijkheden meer.

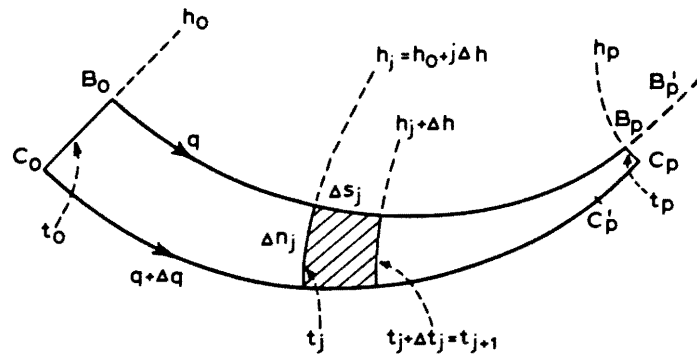
## 5. OPPERVLAKE METINGEN

De formules, welke in hoofdstuk 2 werden afgeleid, hebben als praktisch bezwaar de beperkte toepasbaarheid wegens de veronderstelde horizontale stroming. De methode in hoofdstuk 3 beschreven heeft weliswaar een algemene geldigheid voor stationaire twee-dimensionale stromingen in homogeen doorlatende grond, maar ook daarbij kan van een beperkte toepasbaarheid worden gesproken, gezien het vrij geringe aantal bekende oplossingen.

Heeft men echter de beschikking over een stroomlijnen-figuur - op welke manier ook verkregen - dan kan men via een oppervlaktebepaling komen tot de grootte van de transporttijd over een willekeurig deel van een willekeurige stroomlijn.

Dit kan gemakkelijk worden aangetoond door gebruik te maken van vierkantjesfiguren zoals 9b, 10 of 18. In dergelijke figuren hebben opeenvolgende stroomlijnen of equipotentiaallijnen een constant verschil in waarde van de stroomfunctie of de potentiaal.

Daarbij geldt voor de snelheid van de stroomlijn  $q + \frac{1}{2} \Delta q$  in het vierkantje tussen de potentiaallijnen  $h_j$  en  $h_{j+1}$  zoals afgebeeld in fig. 15:



gearceerd oppervlak  $\Delta A_j = \Delta \eta_j \Delta s_j$

Fig. 15. Het gebied tussen twee stroomlijnen  $q$  en  $q + \Delta q$  kan door het trekken van potentiaallijnen met een constant verschil in potentiaal tussen opeenvolgende lijnen worden verdeeld in een aantal kleine gebieden, die bij benadering rechthoekig zijn, met constante verhouding tussen lengte  $\Delta s$  en breedte  $\Delta u$ . Indien de verdeling zodanig wordt aangebracht, dat  $\Delta q = \Delta \phi = k \Delta h$ , zoals ook gesuggereerd in deze figuur, worden vierkantjes verkregen. Dit principe is ook toepasbaar bij heterogeen doorlatende grond, hoewel dan breking van stroomlijnen en equipotentiaallijnen mogelijk is en deze eigenschap het construeren van de lijnen aanzienlijk moeilijker maakt

$$v_j = \frac{\Delta s_j}{\Delta t_j} \quad (76)$$

Formule (2) kan nu worden vervangen door:

$$v_j = \frac{k}{\beta} \frac{\Delta h}{\Delta s_j} = \frac{\Delta q}{\beta \Delta s_j} \quad (77)$$

Uit (76) en (77) volgt:

$$\Delta t_j = \frac{\beta (\Delta s_j)^2}{k \Delta h} = \frac{\beta (\Delta s_j)^2}{\Delta q} = \frac{\beta \Delta A_j}{\Delta q} \quad (78)$$



$$t_p - t_o = \frac{\beta}{\Delta q} \sum_0^{p-1} \Delta A_j = \frac{\beta}{\Delta q} A_{o, p} \quad (79)$$

$A_{o, p}$  = oppervlak  $B_o C_o C_p B_p$  begrensd door stroomlijnen  $q$  en  $q + \Delta q$   
en door equipotentiaallijnen  $h_o$  en  $h_p$   
 $t_p - t_o$  = transporttijd vanaf de equipotentiaallijn  $h_o$  tot  $h_p$  over  
de stroomlijn  $q + \frac{1}{2} \Delta q$

De gegeven afleiding van formule (79) kan men zelfs als overbodig beschouwen wanneer men bedenkt dat  $(t_p - t_o) \Delta q$  de hoeveelheid vloeistof is, die in de tijd  $t_p - t_o$  door het lijnstuk  $B_o C_o$  is gepasseerd. Het is echter duidelijk dat een vloeistoffront dat op  $t_o$  met de potentiaallijn  $h_o$  samenvalt, op een latere tijd in het algemeen niet meer met een potentiaallijn zal samenvallen.

In fig. 15 zal het vloeistoffront over de stroomlijn  $q$  op de tijd  $t_p$  verder zijn gevorderd dan  $B_p$  en bijvoorbeeld al het punt  $B'_p$  hebben bereikt. Over de stroomlijn  $q + \Delta q$  in deze zelfde figuur zal het vloeistoffront gekomen zijn tot  $C'_p$  gelegen voor  $C_p$ .

Het lijkt nu redelijk om aan te nemen dat in de meeste gevallen de oppervlakken  $B_o C_o C'_p B'_p$  en  $B_o C_o C_p B_p$  met goede benadering aan elkaar gelijk mogen worden gesteld. Er zijn echter ook onmiddellijk gevallen aan te wijzen, dat toepassing van formule (79) een zeer slechte uitkomst oplevert.

Laatstgenoemde omstandigheden vindt men namelijk als men een stroomlijn kiest, waarop een punt ligt met snelheid nul. Dit is bijvoorbeeld het geval met de assen van het coördinatenstelsel van fig. 9b (geval 1 uit hoofdstuk 3), die beide stroomlijnen zijn en in hun snijpunt (de oorsprong) een snelheid nul hebben. Kiest men aan weerszijden van de positieve  $y$ -as twee symmetrische stroomlijnen en vervolgens twee potentiaallijnen met respectievelijk een positieve en een negatieve potentiaal dicht bij nul gelegen, dan kan men het oppervlak dat hiermee wordt ingesloten, willekeurig klein maken. De transporttijd over een klein stuk van de positieve  $y$ -as plus een aansluitend stuk van positieve of negatieve  $x$ -as blijft echter oneindig groot.

Dergelijke punten met snelheid nul komen niet alleen voor in de

ondoorlatende basis (zie fig. 9c), maar kunnen ook voorkomen in het freatisch oppervlak (mits de invoer door het freatisch oppervlak  $N = 0$ , zie fig. 16a) of bij kwelstromingen midden tussen twee sloten op willekeurige diepte afhankelijk van de intensiteitsverhouding tussen neerslagoverschot en kwel (fig. 16b).

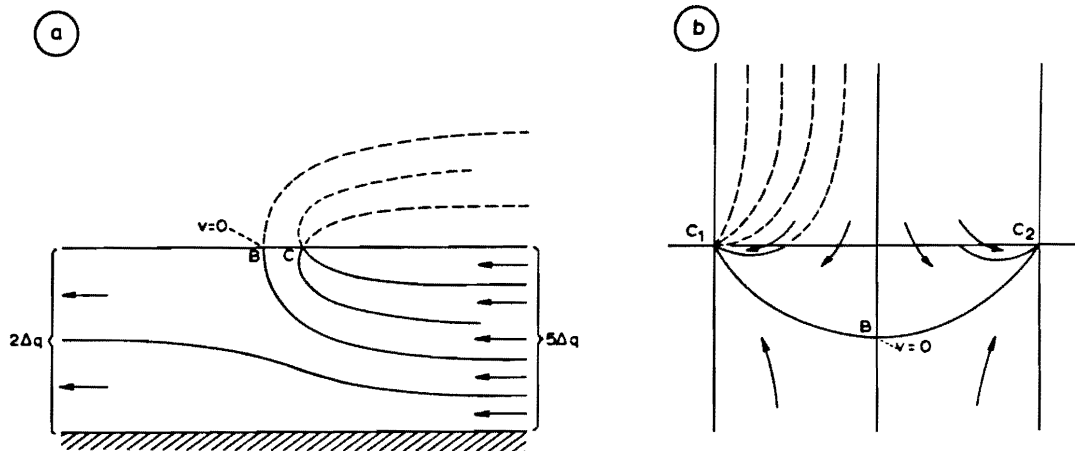


Fig. 16. (a) Een grondwaterstroming lopende in de richting van een ondiepe open leiding behoeft hierdoor niet geheel te worden afgevoerd. Een deel van deze grondwaterstroming kan onder de drain C doorgaan en overeenkomstig de algemene terreinhelling verder stromen.

Indien  $N = 0$ , moet in een verticale doorsnede een punt B worden gevonden, gelegen in het freatisch oppervlak waar  $v = 0$ . Indien  $N > 0$ , dan ligt dit punt onder het freatisch oppervlak.

- (b) Bij de symmetrische drainage van neerslagoverschot en kwel wordt het punt (B) met snelheid nul gevonden op een zekere diepte midden tussen de drains, waarbij de diepte groter is naarmate de kwel zwakker is.

De oplossing van beide problemen (a en b) kan worden afgeleid uit fig. (42) door toepassing van een horizontale stroming met intensiteit  $q$ , en wel voor

(a):  $q_1 < -\frac{1}{2} q_0$  en voor

(b):  $-\frac{1}{2} q_0 < q_1 < 0$  (vergelijk fig. 12)

Hoewel men de bepaling van de transporttijd over stroomlijnen met een punt  $v = 0$  zal vermijden, kan het wel zin hebben de transporttijd te bepalen over een stroomlijn, die dicht langs een dergelijk punt gaat. Om na te gaan hoe groot de fouten door oppervlaktebepaling dan kunnen worden is nog een keer gebruik gemaakt van de bekende oplossing van geval 1 uit hoofdstuk 3. De uitwerking van dit geval geeft geen principiële moeilijkheden en wordt daarom weggelaten. Het resultaat vindt men in fig. 17. Daaruit blijkt dat zelfs in dit geval geen fouten groter dan 10 % ontstaan mits de oppervlaktebepaling maar gebeurt over een gebied dat zo slank is, dat  $x'_1 > 3 x'_0$ .

Omdat de eenvoudige formules behandeld in hoofdstuk 2 alleen een redelijk vertrouwen geven bij vrij goed horizontale grondwaterstromingen wordt hier een voorbeeld gegeven van een symmetrische drainage-toestand in homogeen doorlatende grond bij een zo grote laagdikte, dat aan genoemde voorwaarde in het geheel niet is voldaan.

Fig. 18 is geconstrueerd met behulp van de vierkantjesmethode (ERNST, 1962, pag.50 en 51). Het getoonde resultaat werd als redelijk beschouwd, hoewel enige verbetering nog wel mogelijk schijnt te zijn door vergelijking met de formules (38), (39) voor de beneden-hoeken van het gebied en met formule (8) voor de omgeving van de drain.

Voor de oppervlaktebepaling binnen een stroomlijnen-figuur zijn verschillende eenvoudige methodes beschikbaar. Genoemde methodes verschillen weinig in nauwkeurigheid. De fout die men bij gebruik van fig. 18 verkrijgt wordt vermoedelijk grotendeels veroorzaakt door onvoldoende kwaliteit van het lijnenstelsel.

Zo kan worden genoemd de oppervlaktebepaling met behulp van een planimeter. Daarnaast is het ook mogelijk, als het lijnenstelsel is afgebeeld op een stuk papier van gelijkmatige kwaliteit, een oppervlaktebepaling te doen door uitknippen en wegen. Is er een vierkantjesfiguur beschikbaar (dus een volledig stelsel van potentiaallijnen met constant waardeverschil tussen opeenvolgende lijnen) dan kan men ook snel een eenvoudig tot een oppervlaktebepaling komen door sommering van kwadraten over alle vierkantjes.

Fig. 18 heeft in het origineel een grootte  $14 \times 28 \text{ cm}^2$ . Daarbij is de grootte van het gearceerde gebied  $A=35,8 \text{ cm}^2$ . Dus  $A/L^2 = 0,0114$ .

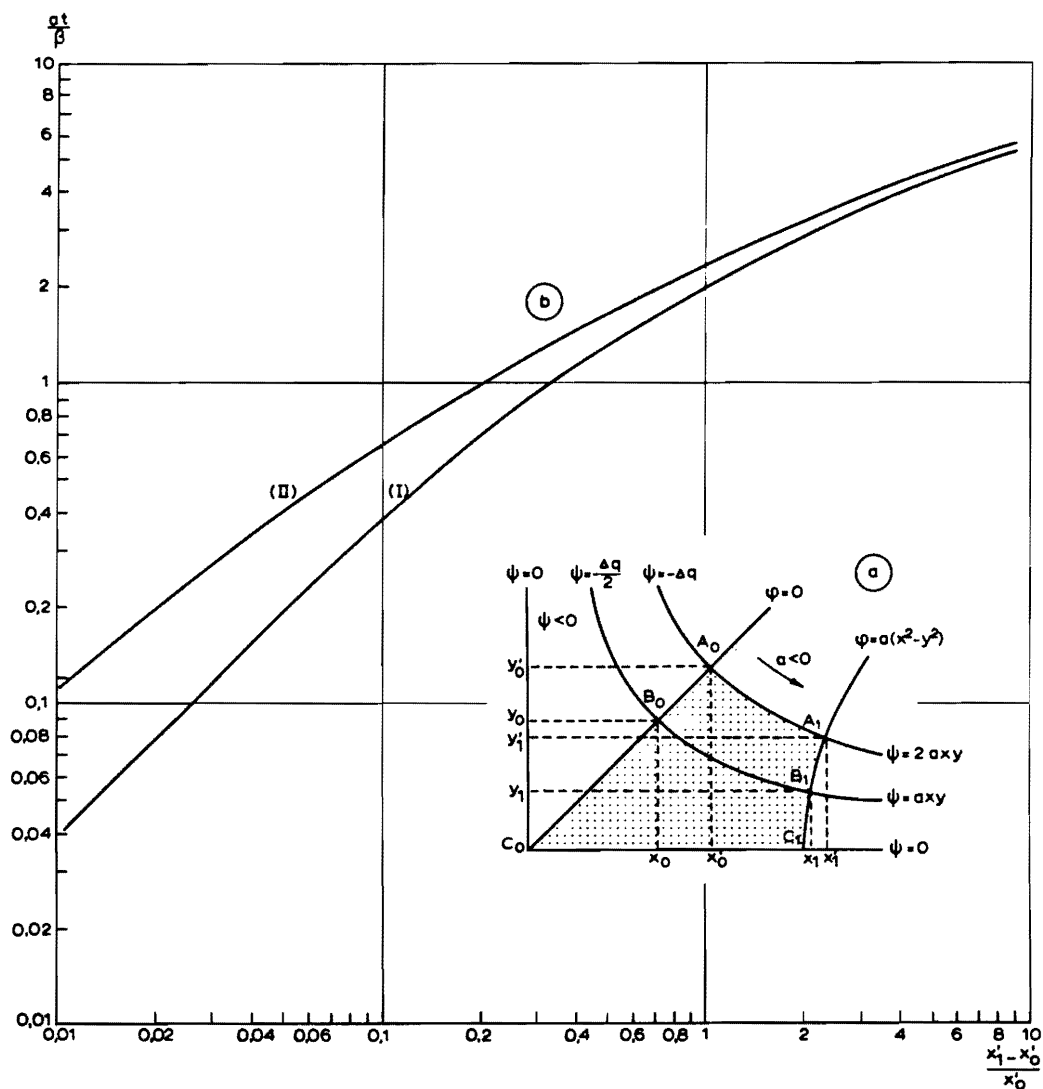


Fig. 17. (a) De hyperbolische stroomlijnen en equipotentiaallijnen afgeleid uit  $\omega = a\zeta^2$   
 (b) Het verband tussen  $\frac{at}{\beta}$  en  $\frac{x_1'}{x_0'} - 1$   
 (I) afgeleid uit formule (41)  
 (II) afgeleid uit formule (79), waarbij A berekend als het oppervlak  $A_0 C_0 C_1 A_1$  begrensd door 2 rechten en 2 hyperbolen (zie gearceerd gebied)

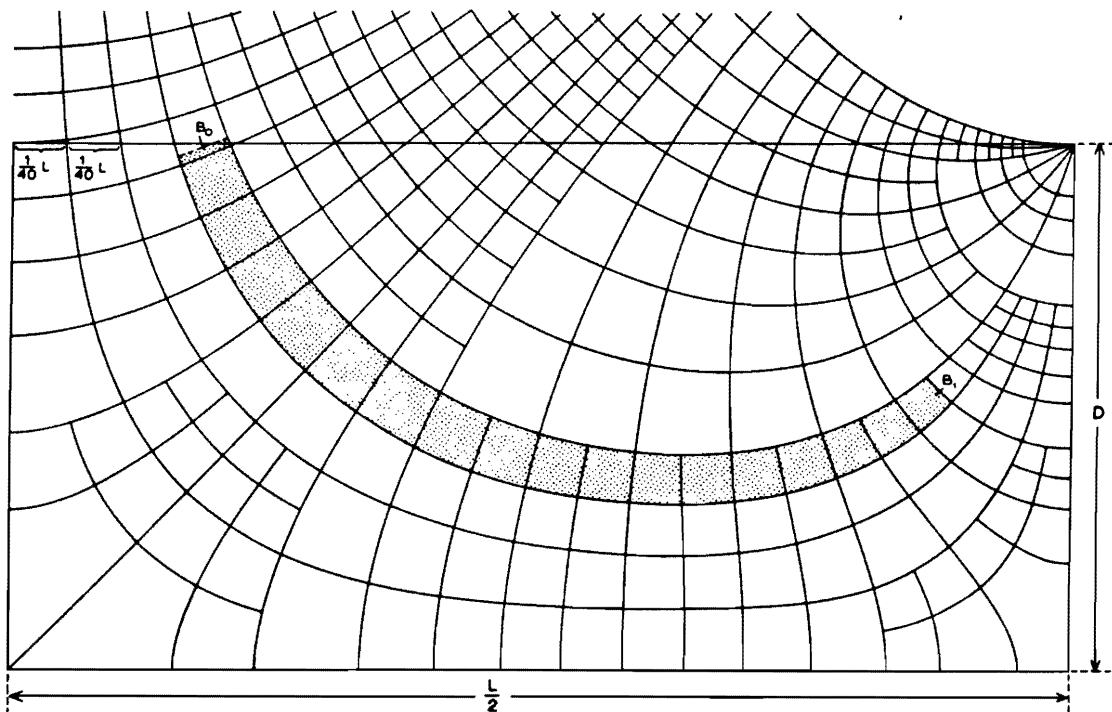


Fig. 18. Stroomlijnen en equipotentiaallijnen bij de stationaire symmetrische drainage van homogeen doorlatende grond met  $D/L = 0,25$

Formule (79) kan worden vervangen door:

$$\frac{N}{\beta L} \{t(B_1) - t(B_0)\} = \frac{A}{l \Delta x}$$

$\Delta x$  = horizontale afstand tussen de beginpunten van de stroomlijnen in het freatisch oppervlak.

Men kan onmiddellijk zien dat in fig. 18 geldt:  $\Delta x = \frac{1}{40} L$ . Verder zijn nog zekere waarden voor  $N$ ,  $\beta$  en  $L$  nodig om een concrete uitkomst voor de transporttijd van  $B_0$  naar  $B$  te verkrijgen. Wordt hiervoor genomen:

$$N = 300 \text{ mm/jaar} ; \beta = 0,375 ; L = 100 \text{ m} ;$$

dan volgt tenslotte als uitkomst voor de transporttijd:

$$t(B_1) - t(B_0) = \frac{40 \beta L}{N} \times \frac{A}{L^2} = \frac{40 \times 0,375 \times 100}{0,3} \times 0,0114 = 57 \text{ jaar}$$

Zo kan men voor elk punt van het grondblok de tijdsduur berekenen die nodig is voor het transport langs de bijbehorende stroomlijn vanaf een punt in het freatisch oppervlak. Fig. 19 geeft een afbeelding van de aldus bepaalde isochronen.

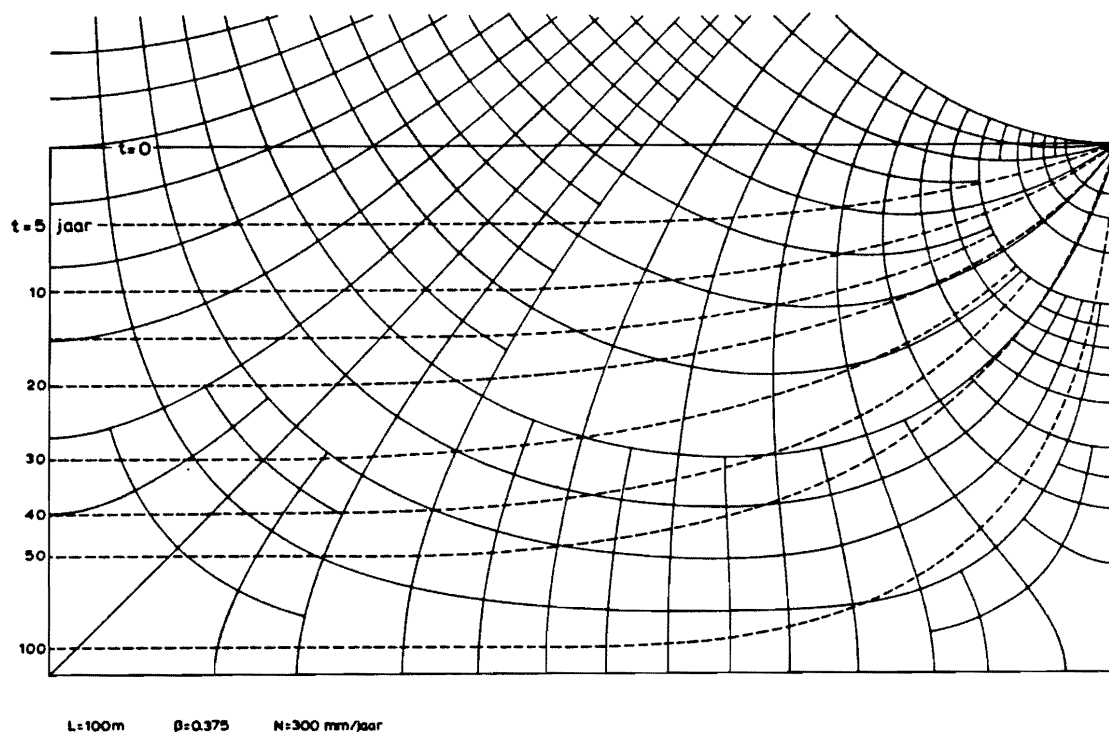


Fig. 19. Isochronen voor dezelfde grondwaterstroming als afgebeeld in fig. 18. De vorm van de stroomlijnen is ongevoelig voor schaalverandering; ook de waarden van  $N$ ,  $k$  en  $\beta$  hebben daarop geen invloed. Voor concrete waarden van de transporttijd is het wel nodig zekere waarden voor  $N$ ,  $\beta$  en  $L$  aan te nemen

Hoewel in het voorgaande ter wille van een korte behandeling geen stroming in heterogeen doorlatende gronden werd genoemd, mag het wel als evident worden verondersteld, dat oppervlaktebepaling ook voor dergelijke gevallen een bruikbare methode is, mits een 2-dimensionale

afbeelding mogelijk is. De vierkantjesmethode gebruikt bij de constructie van fig. 18 is dan weinig geschikt. Is de grond samengesteld uit verschillende horizontale lagen, waarbij elke laag apart beschouwd weer homogeen doorlatend is, dan is de relaxatie-methode met orthogonaal netwerk wel een geschikte methode om redelijk snel tot een stroomlijnen-figuur te komen (VAN DEEMTER, 1950).

## 6. SAMENVOEGING VAN UITKOMSTEN VERKREGEN IN DE HOOFDSTUKKEN 2, 3 EN 5

Een uitkomst die voor de praktijk van belang kan zijn is de tijd, die het grondwater nodig heeft om vanaf het grondoppervlak langs een eventueel variabele stroomlijn naar de drain gaande aldaar tot uit-treding te komen. Op grond van voorgaande beschouwingen is het duidelijk dat behalve in geval van zeer diepe grondwaterstanden dit kan worden gelijkgesteld aan het tijdsverloop over een stationaire stroomlijn vanaf het freatisch oppervlak tot aan een lijnvormige drain (puntvormig in een verticale doorsnede). Uit afbeeldingen zoals fig. 18 blijkt dat de werkelijke afmetingen van de drain relatief van weinig invloed zijn.

Bij zeer kleine  $D/L$  is de symmetrie van de grondwaterstroming van weinig belang. Men hoeft slechts  $x = 0$  te stellen bij het hoogste punt van het freatisch oppervlak (waterscheiding) en kan dan met de volgende eenvoudige variant op formule (11) al een redelijke benadering krijgen:

$$t = \frac{\beta D}{N} \ln \frac{x_d - x_m}{x_d - x} \quad (81)$$

$x_d$  = waarde van  $x$  bij de drain

$x_m$  = waarde van  $x$  op de plaats waar de hoogte van het freatisch oppervlak in de betrokken strook maximaal is

In geval van symmetrie (vergelijk fig. 4 en 5) kan hiervoor worden geschreven:

$$t = \frac{\beta D}{N} \ln \frac{L}{2x} \quad (82)$$

Door combinatie van enkele uitkomsten van voorgaande hoofdstukken kan men benaderingsformules vinden die ook bij wat grotere waarden van  $D/L$  nog een praktisch aanvaardbare nauwkeurigheid geven.

Wil men beter rekening houden met de radiale stroming dan bij de formules (81) en (82), dan heeft het zin de omgeving van de open leiding een aparte behandeling te geven zoals in hoofdstuk 2 al is gedaan.

Voor  $0 < x < \frac{1}{2} L - D$  werd formule (14) afgeleid. Een grafische afbeelding van deze formule vindt men in fig. 6. Voor het gebied met overwegend radiale stroming, namelijk  $\frac{1}{2} L - D < x < \frac{1}{2} L$  kan de parabolische formule (13) worden gebruikt.

Voor vrij grote waarden van  $D/L$  (bijv. tussen 0,1 en 0,5) zou men verwachten, dat een optelling van de formules (11) en (50) nog betere uitkomsten zou opleveren. De uitkomsten zouden ongeveer gelijk moeten zijn aan, of iets lager dan wat uit (56) volgt voor  $D = \infty$ . Er is echter de mogelijkheid om te vergelijken met de resultaten van oppervlaktemetingen in fig. 18. Daaruit is gebleken dat dit geen verbetering geeft, maar dat wel redelijk goede uitkomsten worden verkregen door hetzelfde geldigheidsgebied als in (85) te nemen, echter de laatste term van deze formule te vervangen door de uitkomst van (49) na substitutie van  $x_B - x_A = D$ :

$$\frac{NT}{\beta L} = \frac{D}{L} \ln \frac{L - 2D}{2x} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \left[ 2 + \frac{2}{\pi} \left\{ -\ln 2 - \ln\left(\sin \frac{2\pi x}{L}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{arcsinh} \left(\cot \frac{2\pi x}{L}\right) \right\} \right] \\ \text{voor } 0 < x < \frac{L}{2} - D \quad (83)$$

De formules (13), (14), (56) en (86) en de uitkomsten van 20 oppervlaktemetingen in fig. 18 zijn grafisch weergegeven in fig. 20. Voor de lagere waarden van  $D/L$  blijken de verschillen zeer klein te zijn. Voor  $D/L = 0,25$  en kleine  $x/L$  lopen de verschillen op tot ongeveer 30 %. Gezien de moeilijkheden in de praktijk bij de laagdiktebepaling en de onzekerheid omtrent de homogeniteit van de grond be-



hoeven deze verschillen bij praktische toepassingen geen overwegend bezwaar te zijn.

## 7. CONCLUSIES

Bij de symmetrische drainage van neerslagoverschot hebben de doorlatendheid  $k$  en de drainageweerstand  $T$  (zie pag. 24-25) geen overwegende invloed op de transporttijd. Primaair van belang is de laagdikte en in wat mindere mate ook de afstand tussen de open leidingen. Dit blijkt zowel uit de afgeleide formules (zie bijv. L achter het log-teken in formule 82), als uit de beschouwing van de opschuiving van het grondwater in een stroomlijnenfiguur (bepaling van transporttijd uit oppervlaktebepaling).

Waar het relief (hoogteverschillen in het grondoppervlak) en de  $kD$ -waarde klein zijn, zullen ook kleine drain- of slootafstanden nodig zijn om het neerslagoverschot af te voeren. Bij de bepaling van gewenste drainafstanden met behulp van formules, die voor horizontale grondwaterstromingen zijn afgeleid, is het gebruikelijk om de doorlatendheid van de grond dieper dan een kwart van de drainafstand als van verwaarloosbare invloed te zien. Bij  $D > L/4$  verdwijnt de geldigheid van dergelijke drainageformules. Dezelfde geldigheids grens voor transporttijdformules blijkt uit fig. 20.

Zou men evenals bij de bepaling van gewenste drainafstanden gebruik maken van een equivalente laagdikte (bijv.  $d = L/4$  bij  $D = \infty$ ), dan zijn de fouten aan de kant van de open leidingen relatief klein (zie fig. 20 voor grote waarden van  $x/L$ ), maar in het midden van de strook duidelijk groter (kleine waarden van  $x/L$ ). Bedenkt men hierbij echter dat een deel van het grondwater in het betrokken gebied naar een ver buitengebied kan afstromen (wegzijging) of daar vandaan afkomstig kan zijn (kwel), en dat het in de praktijk meestal niet mogelijk is zwakke effecten van deze soort te achterhalen, dan volgt daaruit dat het niet veel zin heeft grote waarde te hechten aan de nauwkeurigheid van een formule afgeleid voor een ideale toestand waarbij de intensiteit van de diepe grondwaterstroming gelijk nul wordt gesteld.

Zowel uit fig. 6 als uit fig. 20 is onmiddellijk af te lezen dat kleine transporttijden (bijv.  $t < 3$  jaren) bij grootte laagdikte  $D$  alleen mogen verwacht worden vanaf invoerpunten, die vrij dicht bij de drainageleidingen zijn gelegen. Voor het middelgedeelte van de strook tussen twee evenwijdige open leidingen zal dit alleen het geval zijn bij zeer kleine waarden van  $D$  ( $\approx 2$  m). Daarentegen als  $x$  dicht bij nul ligt (midden van het perceel) en  $D$  een vrij grote waarde heeft, zal de transporttijd vanaf maaiveld tot het dichtstbij gelegen uitstromingspunt als gauw boven enkele tientallen jaren stijgen. Voor zover het grondwater echter deelneemt aan een diepe stroming, die de primaire helling van het gebied volgt over zeer grote afstanden, kan men voor een eerste benadering beter de volgende eenvoudige formule gebruiken:

$$t(x_2) - t(x_1) = \frac{\beta(x_2 - x_1)^2}{k(h_1 - h_2)} = \left| \frac{\beta(x_2 - x_1)}{k \operatorname{tg} \alpha} \right| \quad (84)$$

$k$  = gemiddelde doorlatendheid van de zandige afzettingen op grote diepte

$\operatorname{tg} \alpha$  = gemiddelde terreinhelling

De grootste afstanden, die binnen Nederland in dit opzicht van belang kunnen zijn, kunnen op rond 30 km worden geschat. Neemt men daarbij voor  $k$  en  $\operatorname{tg} \alpha$  geen zeer kleine waarden (bijv. 10 m/dag en 0,001) dan volgt uit (84) dat de transporttijd bij dergelijke diepe grondwaterstromingen in grootte-orde maximaal 3000 jaar kan zijn.

Bij de diepe grondwaterstromingen kan de vorm van het front tussen twee verschillende watermassa's in afhankelijkheid van de laagte van de grond een veel ingewikkelder vorm hebben (zie bijv. ERNST, 1969, fig. 7), dan wat op voorgaande pagina's wordt getoond in fig. 19 voor een ondiepe grondwaterstroming en in fig. 8 voor een vrij eenvoudige diepe grondwaterstroming.

Terwijl dus bij de symmetrische drainage vooral de ondiepe grondwaterstroming en daarmee de doorlatendheid van de bovenste lagen van belang zijn, is het bij de diepe grondwaterstromingen gewenst de laagte van de diepere bodemlagen zo goed mogelijk te leren kennen,

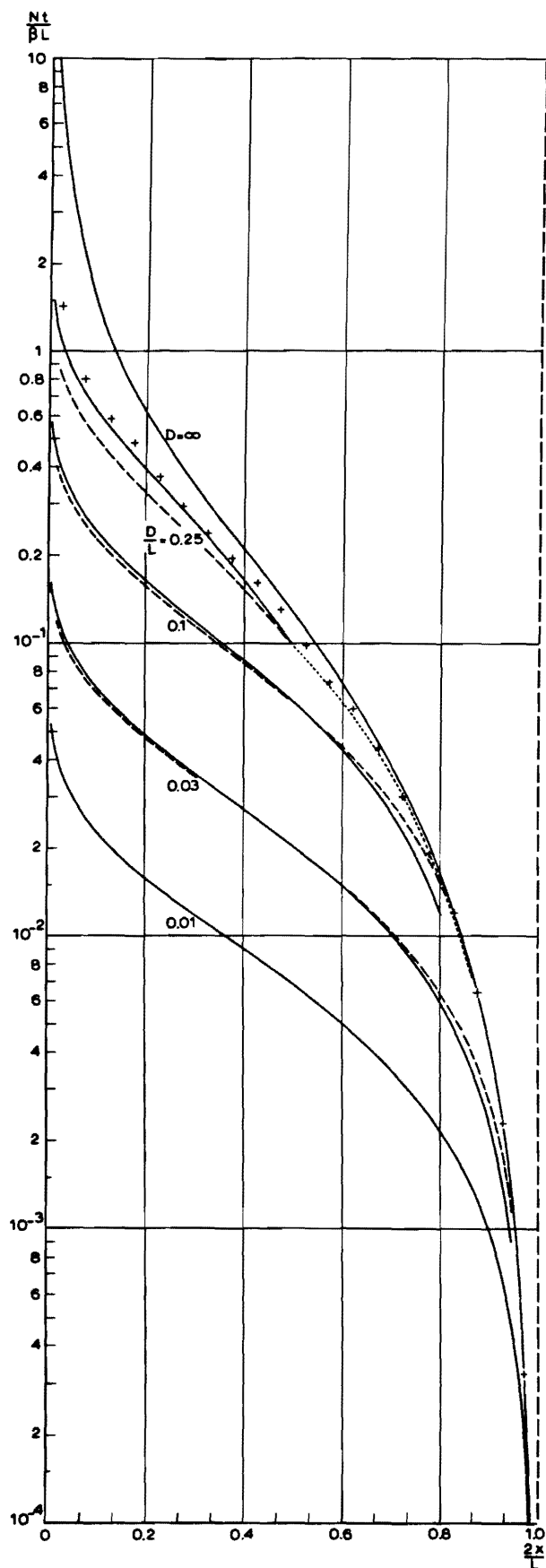


Fig. 20. Transporttijd bij de stationaire symmetrische drainagestroming in een homogeen pakket.

Gebruikte formules:

voor  $D = \infty$  formule (56);

voor de andere waarden

van  $D/L$ :

----- formule (13)

— — — — — formule (14)

————— formule (83)

+ + + + oppervlakte-  
meting in  
fig. 18

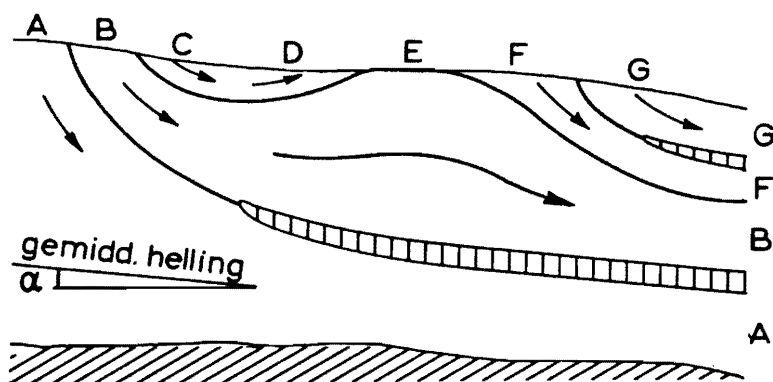


Fig. 21. De diepe grondwaterstroming in een golvend gebied met wegzijging waar de terreinhelling vrij sterk is en kwel waar de helling minder sterk of mogelijk zelfs tegengesteld is aan de gemiddelde helling

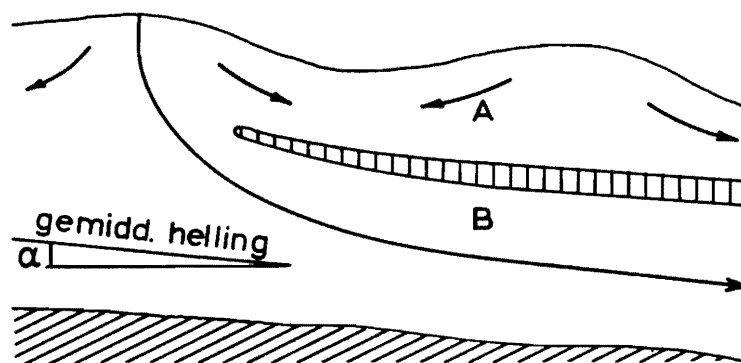


Fig. 22. Een gebied met golvend terreinoppervlak, waardoor plaatselijk de ondiepe en de diepe grondwaterstroming een tegengestelde richting kunnen hebben

daar dit in sommige gevallen een bijzondere invloed op de samenstelling van het grondwater zal kunnen hebben. Zo kan men zich voorstellen, dat grondwatermassa's aanwezig in opeenvolgende lagen van de bodem afkomstig uit vrij ver uiteengelegen voedingsgebieden (zie B en F in fig. 21). Een andere bijzondere toestand is de tegengestelde stromingsrichting van ondiep en diep grondwater (A en B in fig. 22), wat bij gelijke vloeistofeigenschappen alleen mogelijk is, als er een scheidende laag aanwezig is en het grondoppervlak plaatselijk een helling heeft tegengesteld aan de algemene terreinhelling. Bij grote verschillen in doorlatendheid kunnen grote verschillen in opschuiving ontstaan en daarmee een zeer schuine ligging van het front ten opzichte van de stroomrichting. Laatstgenoemd verschijnsel komt ook algemeen voor bij stroming in homogene grond (zie het diepere gedeelte van het homogene pakket en de omgeving van de drain in fig. 18 en 19).

In hoeverre dergelijke bijzondere omstandigheden praktische betekenis hebben bij een bestudering van het transport van opgeloste stoffen, is nog niet bekend, daar op dit gebied nog weinig experimenteel en toegepast onderzoek is gedaan. Met betrekking tot de theoretische behandeling van potentialen en fluxen bij regionale grondwaterstromingen zijn wel een groot aantal publikaties verschenen (zie onder meer ERNST, 1962; VAN VOAST en NOVITZKI, 1968).

## LITERATUUR

- BEAR, J., 1972. Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier, New York.
- BREITENÖDER, M., 1942. Ebene Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche. Springer, Berlin.
- DEEMTER, J.J. VAN, 1950. Theoretische en numerieke behandeling van ontwaterings- en infiltratie-stromingsproblemen. Proefschrift Universiteit van Amsterdam.
- ERNST, L.F., 1962. Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij aanwezigheid van horizontale evenwijdige open leidingen. Proefschrift Rijks-Universiteit Utrecht.
- 1969. Groundwater flow in the Netherlands Delta Area and its influence on the salt balance of the future Lake Zeeland. Journal of Hydrology 8: 137-172.
- HUISMAN, L., 1972. Groundwater recovery. Mac Milland, London.
- KIRKHAM, D. and W.L. POWERS, 1972. Advanced soil physics. Wiley, New York.
- MUSKAT, M., 1937. The flow of homogeneous fluids through porous media Mac Graw-Hill, New York.
- VOAST, W.A. VAN and R.P. NOVITZKI, 1965. Groundwater flow related to stream flow and water quality. Water Resources Research, 4, 1968, 769-775.